rijksuniversiteit
groningen

Tentamen Lineaire Algebra

22 juni 2011 18:30-21:30 uur

Tijdens dit tentamen mogen boek/diktaat/aantekeningen en een eenvoudige **rekenmachine** worden geraadpleegd. Het gebruik van een grafische rekenmachine is **niet toegestaan.**
Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Een antwoord zonder berekening zal dus niet worden goed gerekend. Succes !

Vermeld op elke bladzijde je naam, studentnummer en studierichting.

Gratis: $\boxed{10}$

1. Gegeven is het stelsel vergelijkingen

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & \beta \\ x & & & + & 2z & = & -5 \\ -x & + & 2y & + & \alpha z & = & 5 \end{array}$$

met α en β nader te bepalen constantes.

(a) $\boxed{5}$ Bepaal d.m.v. 'schoonvegen' de oplossing (x, y, z) voor het geval $\alpha=2$ en $\beta=10$.

(b) $\boxed{4}$ Bepaal voor willekeurige α de determinant van de matrix bij dit probleem.

(c) $\boxed{4}$ Bepaal m.b.v. de regel van Cramer de oplossing van y voor het geval $\alpha=0$ en $\beta=2$ (x en z hoeven dus niet).

(d) $\boxed{3}$ Bepaal voor welke α het stelsel precies één oplossing heeft.

(e) $\boxed{4}$ Bepaal voor welke α en β het stelsel geen enkele oplossing heeft.

2. Gegeven zijn de vectoren

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ \beta \\ \sqrt{10} \end{bmatrix}$$

Hierin zijn α en β nader te bepalen constantes.

(a) $\boxed{4}$ Geef een vector die loodrecht staat op zowel **a** als **b**.

(b) $\boxed{5}$ Voor welke α zijn **a**, **b** en **c** lineair afhankelijk?

(c) $\boxed{5}$ Voor welke β is de hoek tussen **b** en **d** gelijk aan $\pi/3$?
Aanwijzing: de cosinus van die hoek is dus $\cos(\pi/3) = 1/2$.

3. In de 3D ruimte zijn gegeven het vlak $V : 2x + y - z = 16$ en het punt $P(2, 3, -3)$. De vergelijking voor het vlak V is een zogenaamde 'normaalvergelijking'. Er geldt dat de (normaal)vector $\mathbf{n} = [2 \;\; 1 \;\; -1]^T$ loodrecht staat op het vlak.

(a) $\boxed{3}$ Geef twee lineair onafhankelijke vectoren in (de richting van) het vlak V.

(b) $\boxed{5}$ Bereken de loodrechte projectie van het punt P op het vlak V.

(c) $\boxed{3}$ Bepaal de afstand van het punt P tot het vlak V.

Z.O.Z.

4. **Van lineaire afbeelding $T:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ is gegeven dat $T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = 3$ en $T(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}) = 6$.**

   Van lineaire afbeelding $S:\mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ is gegeven dat een punt x wordt afgebeeld op $\begin{bmatrix} 2x \\ 3x \end{bmatrix}$.

   (a) $\boxed{4}$ Bepaal de matrix A bij T, zodat geldt $T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$.

   Aanwijzing: bepaal het beeld van $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ m.b.v. de 'lineaire eigenschappen' van T.

   (b) $\boxed{4}$ (1) Bepaal de matrix B bij S, zodat geldt $S(\mathbf{x}) = B\,\mathbf{x}$.

   (2) Bepaal vervolgens de matrix die hoort bij de samengestelde afbeelding $S \bullet T$, d.w.z. 'eerst T en dan S'.

   (c) $\boxed{3}$ Is de samengestelde afbeelding $S \bullet T$ injectief (Engels: one-to-one)?

5. In een bos wonen roofvogels (V), muizen (M) en schildpadden (S). De roofvogels eten muizen, maar bijna geen schildpadden. De schildpadden en muizen laten elkaar met rust. De populaties van de dieren varieren van jaar tot jaar volgens het volgende systeem

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= 1.2\; M_k - 0.6\; V_k \\ V_{k+1} &= 0.2\; M_k + 0.4\; V_k + 0.05\; S_k \\ S_{k+1} &= 0.9\; S_k \end{aligned}$$

   waarbij de index k het verloop in jaren aangeeft.
   Op zeker moment ($k = 0$) zijn er 500 muizen 100 roofvogels en 200 schildpadden.

   (a) $\boxed{5}$ Leidt m.b.v. de karakteristieke vergelijking af dat de eigenwaarden van dit systeem worden gegeven door: $\lambda_1 = 0.9, \lambda_2 = 1$ en $\lambda_3 = 0.6$.

   (b) $\boxed{6}$ Leidt via het schoonvegen van 3 stelsels af dat de eigenvectoren van dit systeem worden gegeven door

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{en} \quad \mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   (c) $\boxed{6}$ Bepaal m.b.v. de eigenwaarden en eigenvectoren de populaties na 2 jaar.

   (d) $\boxed{2}$ Beschrijf de toestand in het bos na zeer lange tijd.

6. Gegeven is het gekoppelde stelsel van differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned} y_1{}'(x) &= 2\,y_1(x) - 3\,y_2(x) \\ y_2{}'(x) &= 12 y_1(x) + 2\,y_2(x) \end{aligned}$$

   met randvoorwaarden $y_1(0) = 2$ en $y_2(0) = 0$.

   (a) $\boxed{3}$ Leidt via de karakteristieke vergelijking af dat de eigenwaarden van dit systeem worden gegeven door: $\lambda_1 = 2 + 6i$ en $\lambda_2 = 2 - 6i$.

   (b) $\boxed{4}$ Bepaal de eigenvectoren bij dit probleem.

   (c) $\boxed{8}$ Bepaal m.b.v. de eigenwaarden en eigenvectoren de reële oplossing van het stelsel differentiaalvergelijkingen met bijbehorende randvoorwaarden.

Totaal: $\boxed{100}$